Le 13/2014

CONTRÔLE n°8
Eléments de correction

TS

Ex 1

1°) a) Graphique.

b) (u_n) semble décroissante et converger vers 1.

2°) a) f est définie continue et dérivable sur $]-1;+\infty[$

$\forall x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0$ d'où f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ Donc sur $[0;+\infty[$.

b) Raisonnement par récurrence

Au rang 0 : $u_0 = 4$ d'où $u_0 \geq 1$

On suppose $u_k \geq 1$ avec k entier naturel.

$\Rightarrow f(u_k) \geq f(1)$ car f strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$\Rightarrow u_{k+1} \geq 1$ car $f(1) = 1$.

Donc Par récurrence sur k, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 1$

c) Au rang 0 : $u_1 = f(u_0) = 3 - \dfrac{4}{4+1} = \dfrac{11}{5}$

et $u_0 = 4$

D'où $u_1 \leq u_0$

On suppose $u_{k+1} \leq u_k$ avec k entier naturel

$\Rightarrow f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$ car f strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$\Rightarrow u_{k+2} \leq u_{k+1}$

Donc Par récurrence sur k, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$

D'où (u_n) est décroissante

d) $\begin{cases} (u_n) \text{ décroissante} \\ (u_n) \text{ minorée} \end{cases}$ donc (u_n) converge, appelons l sa limite

Ex 2 $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$

2°) L'algorithme permet de calculer le nème terme de la suite (u_n)

3°) Déplacer le afficher en avant Fin pour.

4°) La suite (u_n) semble décroissante et convergente

$\left(u_0 = 6 \;,\; u_1 = \frac{23}{8} \quad u_2 = \frac{92}{41} \quad u_3 = \quad u_4 = \right)$

5°) $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} = \dfrac{u_n + 2}{3u_n - 3}$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - V_n = \dfrac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} - \dfrac{1}{u_n - 1}$

$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{u_n + 2 - 3}{(u_n - 1)}$

$= \dfrac{1}{3}$

Donc (V_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = \dfrac{1}{6-1} = \dfrac{1}{5}$

6°) Le terme général de V_n est donc $V_n = V_0 + n \times a$

$V_n = \frac{1}{5} + n \times \frac{1}{3}$

Or $V_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ D'où $\dfrac{1}{5} + \dfrac{n}{3} = \dfrac{1}{u_n - 1}$

$\Leftrightarrow u_n - 1 = \dfrac{15}{5n+3} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{15}{5n+3} + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{5n+18}{5n+3}$

7°) Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5n+18}{5n+3} = 1$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

(termes de plus haut degré)