2014/15 — Éléments de correction — TS

CONTRÔLE n°3

Ex 1

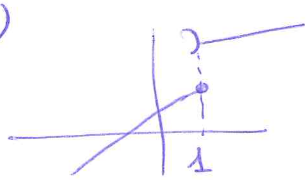
1°) Cours

2°) $x \mapsto x$ continue et dérivable pour $a = 1$

3°) $x \mapsto |x|$ continue en $a = 0$ mais non dérivable en $a = 0$

4°) D'après le théorème du cours "si f est dérivable en a alors f est continue en a" il n'existe pas de fonction continue en a et non dérivable en a

5°)



$y = f(x)$ n'est ni continue ni dérivable en 1 (mais $f(1)$ existe).

Ex 2

1°) $g(x) = x^3 - 3x - 4$ sur $\mathbb{R}$.

ⓐ $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, g dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = 3x^2 - 3$
$= 3(x^2 - 1)$

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3$ terme de plus haut degré

$= -\infty$

ⓑ Sur $]-\infty ; 1]$, g admet un maximum égal à (-2)

d'où $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

Sur $[1 ; +\infty[$, $\begin{cases} g \text{ est continue (polynôme)} \\ g \text{ est strictement croissante} \\ g(1) = -6 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \\ 0 \in [-6 ; +\infty[\end{cases}$

D'après le théorème de la bijection.

$g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$ donc dans $\mathbb{R}$.

$2,19 < \alpha < 2,20$.

c) Sur $[1; +\infty[$, g ~~est~~ strictement croissante et $g(\alpha) = 0$.

D'où

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2°) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

ⓐ f définie continue et dérivable sur I

$\forall x > 1$, $f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - (x^3 + 2x^2)(2x)}{(x^2-1)^2}$

$= \dfrac{3x^4 - 3x^2 + \cancel{4x^3} - 4x - 2x^4 - \cancel{4x^3}}{(x^2-1)^2}$

$= \dfrac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2-1)^2}$

D'où f' est du signe de g car $x > 0$ (puisque $x > 1$) et $(x^2-1)^2 > 0$ (carré).

ⓑ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2}$ termes de plus haut degré

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x$

$= +\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^3 + 2x^2) = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^2 - 1) = 0^+ \end{cases}$ d'où par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

ⓒ Tableau de variation

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\alpha) \approx 3,8$

ⓓ $3 < f(\alpha) < 4$.

e) $\forall x > 1, \quad f(x) - (x+2) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1} + \dfrac{-(x+2)(x^2-1)}{x^2-1}$

$$= \frac{\cancel{x^3} + \cancel{2x^2} - \cancel{x^3} - \cancel{2x^2} + x + 2}{x^2-1}$$

$$= \frac{x+2}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x^2-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x+2) = 0$ Donc $\Delta : y = x+2$ est asymptote oblique à Γ en $+\infty$

De plus $\forall x > 1$, $x+2 > 0$ et $x^2 - 1 > 0$

Donc $f(x) - (x+2) > 0$ d'où Γ est toujours au-dessus de Δ

Ex3

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{1-x}{1+x}$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$

1°/ $\mathcal{D}_f =]-1\,;1]$

2°) $\lim\limits_{x \to -1} 1-x = 2$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 1+x = 0^+$

par produit $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = +\infty$

or $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ d'où par composition $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$.

3°) $x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ est continue sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$

(fonction rationnelle) et positive sur $]-1\,;1]$

$x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$

par composition

$x \longmapsto f(x)$ est continue sur $]-1\,;1]$

4°) f dérivable sur $]-1;1[$

~~$\forall x \ne 1$~~

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f'(x) = \frac{\frac{-1\times(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

$$= \frac{-2}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\times(1+x)^2}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x}\times\sqrt{1+x}\times(1+x)}$$

D'où $f'(x) < 0$. car $1+x > 0$ sur $\mathcal{D}$.

5°) $\Delta : \; y = f'(0)\,(x-0) + f(0)$

$\Delta : y = -x + 1$

6) $\forall x \in \mathcal{D}$,
$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 0}{x-1} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}\times(\sqrt{x-1})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x}\,\sqrt{1-x}}$$

or $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x) = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{1+x}\,\sqrt{1-x} = 0^+$

Donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

D'où f n'est pas dérivable en 1 cependant $\mathcal{C}$ admet une demi-tangente verticale en 1.