CORRECTION CONTRÔLE (A)

Ex 1

$$f(x) = \frac{3}{x-4} - 2$$

1°) $f(x)$ existe pour $x-4 \neq 0$ d'où $D_f =]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[$

2°) $\forall x \in D_f$, $f(x) = \frac{3}{x-4} - 2$

$$= \frac{3-2(x-4)}{x-4}$$

$$= \frac{-2x+11}{x-4}$$

3°) $f(0) = \frac{3}{0-4} - 2 = -\frac{3}{4} - 2 = -\frac{11}{4}$

$$f(2-\sqrt{2}) = \frac{3}{2-\sqrt{2}-4} - 2 = \frac{3(-2+\sqrt{2})}{(-2-\sqrt{2})(-2+\sqrt{2})} - 2$$

$$= \frac{-6+3\sqrt{2}}{4-2} - 2 = -5 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

4°) $\forall x \in D_f$
$f(x) \leq 0 \iff \frac{-2x+11}{x-4} \leq 0$

x	$-\infty$	4		$11/2$		$+\infty$
$-2x+11$	+		+	0	−	
$x-4$	−	0	+		+	
$f(x)$	−	‖	+	0	−	

$S =]-\infty, 4[\cup [\frac{11}{2}, +\infty[$

5°)

$a < b < 4 \Rightarrow a-4 < b-4 < 0$ car $x \mapsto x-4$ croissante sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{1}{a-4} > \frac{1}{b-4}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $]-\infty, 0[$

$\Rightarrow \frac{3}{a-4} - 2 > \frac{3}{b-4} - 2$ car $x \mapsto 3x-2$ croissante sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(a) > f(b)$

D'où f est décroissante sur $]-\infty, 4[$

$$4 < a < b \Rightarrow 0 < a-4 < b-4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a-4} > \frac{1}{b-4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{a-4}-2 > \frac{3}{b-4}-2$$

$$\Rightarrow f(a) > f(b)$$

d'où f décroissante sur $]4;+\infty[$

Ex 2 :

1°) $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$

2°) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (3x+2)^2-(x-1)^2$

$$= 9x^2+12x+4-(x^2-2x+1)$$

$$= 8x^2+14x+3$$

3°) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (3x+2)^2-(x-1)^2$

$$= (3x+2-x+1)(3x+2+x-1)$$

$$= (2x+3)(4x+1)$$

4°) Démontrons l'égalité donnée par l'énoncé

$$\forall x \in \mathbb{R}, 8\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{43}{2} = 8\left(x^2+\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}\right)-\frac{43}{2}$$

$$= 8x^2+14x+\frac{49}{2}-\frac{43}{2}$$

$$= 8x^2+14x+3$$

$$= g(x)$$

Var sur $]-\infty;-\frac{7}{4}]$

$a < b \leq -\frac{7}{4} \Rightarrow a+\frac{7}{4} < b+\frac{7}{4} \leq 0$ car $x \mapsto x+\frac{7}{4}$ croissante sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \left(a+\frac{7}{4}\right)^2 \geq \left(b+\frac{7}{4}\right)^2 \geq 0$ car $x \mapsto x^2$ décroissante sur $]-\infty;0]$

$\Rightarrow 8\left(a+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{43}{2} \geq 8\left(b+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{43}{2}$ car $x \mapsto 8x-\frac{43}{2}$ croissante sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(a) > f(b)$

d'où f décroissante sur $]-\infty;-7/4]$

Sur $\left[-\frac{7}{4} ; +\infty\right[$

$a < b \leq -\frac{7}{4} \quad \Rightarrow a+\frac{7}{4} < b+\frac{7}{4} \leq 0$

$\Rightarrow \left(a+\frac{7}{4}\right)^2 < \left(b+\frac{7}{4}\right)^2 \leq 0$

$\Rightarrow 8\left(a+\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{43}{2} < 8\left(b+\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{43}{2}$

$\Rightarrow f(a) < f(b)$

D'où f croissante sur $\left]\left[-\frac{7}{4} ; +\infty\right[\right.$.

5°) Tableau de variations

6°) f admet un minimum égal à $-\frac{43}{2}$ atteint pour $x = -\frac{7}{4}$

car $g\left(-\frac{7}{4}\right) = 8\left(x-\frac{7}{4}+\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{43}{2} = -\frac{43}{2}$.